Armin P. Barth

«Beweisen, Kurtchen, beweisen!»[1]

Was tut ein Mathematiker, wenn er beweist? Wie sicher ist eine bewiesene Aussage, etwa im Vergleich zu einem Beweis in den Naturwissenschaften oder in der Justiz?

Que fait un mathématicien en établissant une preuve? Cette dernière est-elle certaine? Est-elle comparable à une preuve scientifique ou judiciaire?

Man hört immer wieder, dass mathematische Aussagen gegenüber Aussagen anderer Disziplinen den Vorzug geniessen, beweisbar zu sein, dass es kein Wenn und Aber und Vielleicht gibt und dass man, ist eine Aussage einmal bewiesen, nicht mehr anderer Meinung sein kann, ausser man riskiert bewusst, sich dem Vorwurf der Sturheit und Ignoranz auszusetzen. Was ist es aber, was einen Text zu einem Beweis macht? Was tut ein Mathematiker, wenn er beweist? Und wie sicher ist eine bewiesene Aussage wirklich? Dieser Text versucht, diese Fragen mit verschiedenen Beispielen anzugehen, sie auszuloten und ihnen, wenn möglich, Antworten zu geben.

1 Wer hat nicht schon von der *Neunerprobe* gehört oder sie gar angewendet: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Einige Beispiele, in denen Q immer die Quersumme bezeichne, mögen dies belegen:

- Die Zahl 72 (=8*9) hat Q=9; beide Zahlen sind durch 9 teilbar!
- Die Zahl 198 (=22*9) hat Q=18; beide Zahlen sind durch 9 teilbar!
- Die Zahl 1017 (=113*9) hat Q=9; beide Zahlen sind durch 9 teilbar!

Und auch wenn wir hundert Beispiele rechnen, stets wird sich dieses Besondere ereignen, und einmal werden wir ermüden und denken: Na prima, mit der Neunerprobe hat es wohl seine Richtigkeit. Nun könnte sich aber, wenn wir die Neunerprobe auf diese Weise akzeptieren, ein Gefühl der Unzufriedenheit in uns breit machen: Vielleicht täuschen wir uns doch und hatten mit den bisherigen Beispielen einfach nur Glück. Könnte es nicht sein, dass wir, wenn wir Zahlen ganz anderer Grössenordnung untersuchen, ein Gegenbeispiel finden, eine Zahl, die *nicht* durch 9 teilbar ist, obwohl ihre Quersumme durch 9 teilbar ist? Welchen Wetteinsatz wären wir für die allgemeine Gültigkeit der Neunerprobe bereit zu riskieren? Zudem ist es unbefriedigend, eine Regel allein deswegen zu akzeptieren, weil eine erdrückende Menge von Beispielen sie uns einreden will. Wir müssen zugeben: Wir *verstehen* die Neunerprobe noch nicht!

Im Gegensatz zur Mathematik ist in den Naturwissenschaften eine erdrückende Menge von Beispielen häufig Anlass zur Postulierung eines (Natur-) Gesetzes. Doch während es dort darum geht zu erkennen, das sich etwas *so und so verhält*, und ein naturwissenschaftliches Gesetz Bestand hat bis zum ersten Auftauchen eines Gegenbeispieles, geht es in der Mathematik darum zu verstehen, dass sich etwas so und so verhalten *muss*. Wenn wir *diese* Art von Verständnis anstreben, werden wir durch das Anhäufen von immer weiteren Beispielen die absolute Sicherheit, die letzte Gewissheit nicht erlangen können. Es drängt uns, hinter die Kulissen zu schauen, den tieferen Grund zu erfahren, eine noch verborgene Eigenschaft zu entdecken, die das Auflisten weiterer Beispiele überflüssig und lächerlich macht, es drängt uns, die Situation ganz und gar zu *verstehen*.

Dabei kann uns ein Beweis helfen. Den unwiderlegbaren Belegen ähnlich, die dem Detektiv den Tathergang aufdecken, versetzt uns ein Beweis in die Lage, bezüglich der Neunerprobe absolut sicher zu sein und, mehr noch, zu verstehen, weshalb es sich so, wie in der Neunerprobe behauptet, verhalten *muss*. Und wenn der Beweis vollbracht sein wird, werden wir in uns ein Wohlgefühl wie nach einem gelösten Fall empfinden.

1 aus F. Dürrenmatt, Die Panne, Werkausgabe in dreissig Bänden, Diogenes, Zürich, 1980

2 Stellen wir uns vor, jemand tritt an uns heran mit der Behauptung *«Alle Zahlen der Form $2^\wedge 2^n+1$ für n=1,2,3,... sind prim[2].»* Wie werden wir reagieren? Nun, es kann sich schon lohnen, einige Beispiele zu untersuchen, denn immerhin könnte es sein, dass die Aussage falsch ist und dass wir die Falschheit sofort entdecken:

$$2^\wedge 2^1+1 = 2^2+1 = 5$$
$$2^\wedge 2^2+1 = 2^4+1 = 17$$
$$2^\wedge 2^3+1 = 2^8+1 = 257$$
$$2^\wedge 2^4+1 = 2^{16}+1 = 65537$$

Die Behauptung scheint aber stichhaltig zu sein: 5, 17 und 257 sind sicherlich prim, für 65537 ist ein etwas grösserer Aufwand nötig, doch wenn wir ihn nicht scheuen, zeigt es sich, dass auch diese Zahl prim ist. Wie *sicher* sind wir bezüglich der Behauptung? *Primzahlen* sind widerspenstige Objekte, und es scheint angebracht, vorsichtig zu sein. Betrachten wir noch das nächste Beispiel:

$$2^\wedge 2^5+1 = 2^{32}+1 = 4'294'967'297$$

Ist das prim? Nun sind wir in einer zwiespältigen Situation: Die Zahlen werden so riesig, dass es sich empfiehlt, genau darüber nachzudenken, ob sich der Aufwand lohnt! Sollen wir diese Zahl auf Primheit testen, oder wollen wir von der Richtigkeit der Behauptung schon überzeugt sein und nach einem Beweis dafür suchen?

3 Die Mathematiker haben das Beweisen nicht für sich allein gepachtet. Wenn ein Ankläger erklärt, man habe einen *Indizienbeweis* für die Urheberschaft einer Tat, so meint er damit, dass *starke Gründe* für diese Urheberschaft sprechen, dass freilich die letzten Zweifel noch nicht ausgeräumt sind. Wenn Walter in «Der zerbrochene Krug»[3] ruft:

> *«Zur Sache hier. Vom Krug ist hier die Rede. – Beweis, Beweis, dass Ruprecht ihn zerbrach!»,*

so verlangt er nach juristischen Belegen für die Schuld Ruprechts, die so schlüssig und überzeugend sind, dass eine andere Täterschaft unmöglich ist. Dass juristische Beweise aber heikel sein können, zeigt etwa das Beispiel des Alfredo Traps aus Dürrenmatts «Die Panne», der den ihm vom Gericht der Pensionierten zur Last gelegten Mord erst zurückweist («Beweisen, Kurtchen, beweisen!»), dann aber, während des gewaltigen Besäufnisses, in einer Anwandlung von Stolz und dem Wahn eigener Bedeutsamkeit, das Verbrechen für sich reklamiert und sich erhängt, obwohl die Beweise ihn nicht eines Verbrechens überführen, das juristisch verfolgt werden könnte. Gleichwohl scheint ein mathematischer Beweis doch einen *höheren Grad an Sicherheit* zu erzeugen. Während durch juristische Beweise schon oft Unschuldige verurteilt wurden, ist kein einziger einmal anerkannter und überprüfter mathematischer Beweis jemals nachträglich verworfen worden. Wir werden uns fragen müssen, woran das genau liegt.

Zuerst geben wir aber Auflösungen zu den oben besprochenen Problemen an: Um zu beweisen, dass die Behauptung aus **2** falsch ist, muss lediglich ein *Gegenbeispiel* angeführt werden: In der Tat ist die letzte von uns notierte Zahl nicht prim. Euler fand nämlich die Zerlegung

$$4'294'967'297 = 641*6'700'417.$$

Die in **1** formulierte Neunerprobe ist korrekt, wie ein Beweis zeigt: Wir führen ihn für vierstellige Zahlen; bitte überzeugen Sie sich davon, dass er analog für jede andere Stellenzahl geführt werden kann. Sei also n eine beliebige vierstellige Zahl. Wir notieren sie in der Form

$$n = \boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}$$

wobei die Ziffern a, b, c, d der Menge {0,1,2,...,9} entstammen. Da wir im Zehnersystem rechnen, kann n auch so notiert werden:

$$n = 1000*a + 100*b + 10*c + d.$$

Drei einfache Umformungen führen zu:

$$n = (999+1)*a + (99+1)*b + (9+1)*c + d$$
$$\Rightarrow n = (999*a + 99*b + 9*c) + (a+b+c+d)$$
$$\Rightarrow n = (999*a + 99*b + 9*c) + Q.$$

Nun sehen wir, dass jede beliebige Zahl n stets so in zwei Summanden zerlegt werden kann, dass der eine Summand gleich der Quersumme und der andere Summand jedenfalls durch 9 teilbar ist. Somit entscheidet allein die Quersumme darüber, ob die Zahl durch 9 teilbar ist oder nicht, d. h. n ist genau dann durch 9 teilbar, wenn Q durch 9 teilbar ist. Damit ist ein Verständnis dafür erwachsen, dass es *logisch unmöglich* ist, dass die Neunerprobe versagt.

---

2 Eine natürliche Zahl >1 heisst *prim*, genau dann wenn sie nur durch 1 und durch sich selber ohne Rest teilbar ist.

3 aus H. von Kleist, Der zerbrochene Krug, Reclam, Stuttgart, 1993

Armin P. Barth, geboren 1962, unterrichtet seit 6 Jahren als Hauptlehrer im Vollamt an der KS Baden und verbrachte das Wintersemester 2001/2002 an der ETH Zürich im Rahmen des Projektes «ETH für die Schule».

4 Was ist ein mathematischer Beweis? Fermat schrieb, das Wesen eines Beweises sei, *«Glauben zu erzwingen»*[4]. Erzwungen kann der Glaube an die Aussage aber nur werden, wenn es *logisch unmöglich* ist, dass die Aussage verletzt werden kann. Wie genau schafft es die Mathematik, diese logische Unmöglichkeit herbeizuführen? Betrachten wir dazu einen weiteren Beweis: Auf die Pythagoreer[5] geht die Entdeckung der *irrationalen Zahlen* zurück. Dass irrationale Zahlen (wie etwa $\sqrt{2}$) existieren, passte so wenig in die Lehre des Pythagoras, wonach alle Vorgänge der Welt sich durch Verhältnisse natürlicher Zahlen (also durch rationale Zahlen) ausdrücken lassen, dass der den Lehren des Meisters sehr streng verpflichtete Teil der Pythagoreer (die *Akusmatiker*[6]) den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ unter allen Umständen zu verheimlichen suchte. Wir wagen es dennoch, den Beweis hier anzugeben.

Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre nicht irrational, also rational, so wäre eine Darstellung

$$\sqrt{2} = a/b$$

mit natürlichen Zahlen a und b ($b \neq 0$) möglich. Quadrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$2 = a^2/b^2,$$

wobei wir die Definition von «Wurzel» (dass nämlich $(\sqrt{2})^2 = 2$ ist) sowie ein Potenzgesetz (dass nämlich $(a/b)^2 = a^2/b^2$ ist) benutzen. Durch Multiplikation mit b^2 erhalten wir

$$2b^2 = a^2$$

Denken wir uns nun die beiden Zahlen a und b in Primfaktoren zerlegt. Nach einem bewiesenen Satz ist diese Primfaktorzerlegung eindeutig, und es gilt zudem, dass das Quadrat einer Zahl jeden Primfaktor entweder gar nicht oder aber in gerader Anzahl enthält. (Warum?) Daher enthält a^2 den Primfaktor 2 entweder gar nicht oder in gerader Anzahl, und dasselbe lässt sich über b^2 sagen. Der Term $2b^2$ enthält demnach den Faktor 2 sicher in ungerader Anzahl! Daraus folgt nun, dass, *wenn* $\sqrt{2}$ rational *wäre*, eine Gleichung entstünde, deren rechte Seite den Primfaktor 2 entweder gar nicht oder in gerader Anzahl, und deren linke Seite ihn in ungerader Anzahl enthielte. Das ist wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung logisch unmöglich!

Was macht diesen Beweis nun so robust, so unanfechtbar und immun gegen jede Art von Zweifel? Beachten Sie, welcher Art unsere Begründungen waren: Wir haben die Definition von «Wurzel», ein Potenzgesetz und einen Satz über Primfaktorzerlegung benutzt: Eine Definition und schon bewiesene Sätze, nichts anderes. Wer wollte Zweifel an einer Definition anmelden? Es handelt sich ja um eine Konvention, eine Bezeichnung oder Sprechweise für einen bestimmten unzweideutig vorgegebenen mathematischen Sachverhalt. Und wer wollte einen schon bewiesenen Satz in Zweifel ziehen? Freilich wird nun klar, dass der von uns bewiesene Satz *gleich sicher* ist wie die in seinem Beweis benutzten früher bewiesenen Sätze. Wie sicher sind aber diese Sätze? Nun, natürlich gleich sicher wie die in ihren Beweisen benutzten noch früher bewiesenen Sätze. Und wie sicher sind diese Sätze? – Das erinnert an das endlose Fragen eines wissbegierigen Kindes, und genau so, wie man dabei das Gefühl hat, dass die Fragen ein Ende finden müssen, verspüren wir bei den mathematischen Sätzen den Drang, das Absteigen zu immer früheren Sätzen zu stoppen. Wie kann das Ende dieses Abstiegs bzw. der Anfang aller Sätze aussehen? Nun, wir müssen einmal zu den «ersten» Sätzen vordringen, die sich nicht aus noch früher bewiesenen Sätzen beweisen lassen. Mathematiker nennen diese Sätze *Axiome*[7]. Es handelt sich dabei einerseits um Aussagen grösstmöglicher Plausibilität oder einfach nur um von (fast) allen akzeptierte Sätze, die die Mathematik wie eine Art Spiel in Gang setzen. Die Axiome selbst sind nicht beweisbar, doch wenn wir sie zum Beweis von Sätzen heranziehen, so sind diese Sätze dann *sicher relativ zu den Axiomen*. Wenn wir von der Korrektheit der mathematischen Axiome überzeugt sind, können wir an den aus ihnen erzeugten Sätzen nicht zweifeln.

Zudem wird in der Mathematik festgelegt, welche *Schlussweisen* erlaubt sind, d. h. wie genau man von einer schon begründeten Aussage zu einer nächsten voranschreiten kann, und dieses streng reglementierte Schlussfolgern ermöglicht dann den Aufbau von aus den Axiomen bewiesenen Sätzen und einen nach oben offenen Überbau von immer neuen bewiesenen Sätzen. Und das macht die mathematischen Beweise so sicher: Es wer-

[4] aus einem Brief Fermats an Clerselier: «La qualité essentielle d'une démonstration est de forcer à croire.»
[5] von Pythagoras (etwa 580-500 v. Chr.) gegründete Schule, die über seinen Tod hinaus Bestand hatte.
[6] die «Hörer».
[7] von griech. axioun: für recht halten

den zur Begründung der einzelnen Schritte ausschliesslich Definitionen, Axiome und schon bewiesene Sätze herangezogen, und es gibt davon nur endlich viele; zudem sind die Schlussweisen vorgeschrieben, und alles ist in einer Kunstsprache abgefasst, die keinen Raum lässt für Zweideutigkeiten und Missverständnisse.

5 Wenn Descartes alles Bezweifelbare niederreisst und nach einem sicheren Grund für seine Philosophie sucht[8], so sucht er gewissermassen die Axiome seiner Philosophie, einen festen Stand, von dem aus sich Aussagen ableiten lassen, die sicher relativ zu den Axiomen sind. Wenn Luther fordert[9], «der Legat oder selbst der Papst sollen nicht nur sagen, du irrst, du hast falsch gelehrt, sondern den Irrtum in der Bibel nachweisen und Begründungen anführen», so sind die Aussagen der Bibel für ihn die Axiome, und er fordert, dass jede theologische Sentenz daraus zu «beweisen» ist. Übrigens hat sich die Theologie verschiedentlich der in **4** besprochenen mathematischen Beweismethode bedient. In der Absicht, die Existenz Gottes zu beweisen, hat etwa Anselm[10] definiert:

Gott = Dasjenige, wozu nichts grösseres gedacht werden kann[11].

Dann «bewies» er, dass Gott *in Wirklichkeit* existieren muss, da aus der Annahme, Gott würde *nur im Geist* existieren, geschlossen werden könnte, dass etwas grösseres gedacht werden kann, nämlich der in der Wirklichkeit existierende Gott; dann aber wäre Gott nicht mehr dasjenige, wozu nichts grösseres gedacht werden kann. Widerspruch! Anselms «Beweis» stützt sich also auf eine Definition und mindestens auf das Axiom, dass ein in Wirklichkeit existierendes Ding grösser ist als das entsprechende nur im Geist vorhandene Ding. Damit versucht Anselm, seine Schlussfolgerung unempfindlich gegen Kritik zu machen, und in der Tat ist die Schlussfolgerung korrekt; die Definition und das Axiom sind aber, genau so wie in der Mathematik, keineswegs geschützt gegen Kritik!

Es darf nicht verschwiegen werden, dass bei der alltäglichen Arbeit des Mathematikers und der Mathematikerin die Orientierung an Definitionen, Axiomen und früher bewiesenen Sätzen nicht im Vordergrund steht. Soll eine neue Vermutung bewiesen werden, so ist zunächst ein guter Einfall, eine starke Idee nötig. Erst danach kann der Beweis zu einer Abfolge begründeter Schritte ausformuliert werden, die alle Bezug nehmen auf Definitionen, Axiome und früher bewiesene Sätze.

Zum Schluss sei noch ein kleines mathematisches Problem gestellt, zu dessen Lösung ein guter Einfall nötig ist. Sie sind herzlich eingeladen, sich an dem Beweis zu versuchen. (Eine Lösung finden Sie in den Anmerkungen[12].) Wir behaupten: *Aus den* 3^k *Zahlen* $(k \geq 2)$

$$0, 1, 2, 3, \dots, 3^k-1$$

können mindestens 2^k *verschiedene Zahlen ausgewählt werden mit der Eigenschaft, dass drei beliebige Zahlen* $a<b<c$ *dieser Auswahl mit Sicherheit unterschiedliche Abstände haben, d. h. dass* $c-b \neq b-a$ *ist.* Können Sie das beweisen?

6 Die Mathematik ist einem speziellen optischen Gerät vergleichbar, das Teile der Welt sichtbar macht. Genau genommen macht es diese Teile nicht sichtbar, sondern bildet sie durch einen komplizierten, undurchschaubaren Mechanismus ab. Wenn wir Beweise führen, so beweisen wir nicht Sachverhalte der Welt, sondern immer nur Sachverhalte dieser Abbildung; wir beweisen, dass gewisse Elemente der Abbildung in gewissen Beziehungen zueinander stehen. In diesem Sinne lässt sich über die Mathematik sagen, was K. Popper[13] über das menschliche Wissen sagte: *«Unser Wissen ist ein kritisches Raten, ein Netz von Hypothesen, ein Gewebe von Vermutungen.»* In diesem Gewebe sind die mathematischen Beweise reissfeste Stränge, doch ihre Enden sind an tausend Stellen mit dem restlichen Gewebe verknüpft, und an diesen Stellen kann das Gewebe reissen…

---

8 nämlich das «Dubito, ergo sum», meist zitiert als «Cogito, ergo sum». Descartes selbst schrieb aber: «Dubito, ergo sum, vel, quod idem est: Cogito, ergo sum.»

9 aus einem Brief Luthers an seinen Landsherren, Nov. 1518; aus: M. Luthers Werke, Briefwechsel, Bd.1. Weimarer Ausgabe, 1930

10 Anselm von Canterbury, 1033–1109, Benediktiner, später Erzbischof von Canterbury

11 Deus = ens, quo maius cogitari non potest

12 Wir stellen die 3^k Zahlen im 3er-System dar: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, … Dabei sind maximal k Stellen nötig. In dieser Menge lassen sich 2^k Zahlen finden, in denen die Ziffer «2» nicht vorkommt. Wir wählen gerade diese Zahlen aus! Seien $a<b<c$ drei beliebige Zahlen dieser Auswahl, so kann unmöglich $c-b=b-a$ gelten. Wäre das nämlich so, so müsste ja $c+a=2b$ sein. Die Zahl 2b enthält aber nur die Ziffern 0 und 2, während c+a an mindestens einer Stelle eine 1 enthalten muss! (a und c sind verschieden, d.h. es gibt mindestens eine Stelle, an der a eine 0 und c eine 1 aufweist oder umgekehrt.)

13 K. R. Popper, Objektive Erkenntnis, Hamburg 1974