Schönheit - Das Ceterum Censeo des Mathematikunterrichtes

Armin P. Barth

Zusammenfassung

Ausgehend von einem niederschmetternden Zitat eines Journalisten, der gemäss eigener Aussage als Schüler nie auch nur ein winziges Stück schöne Mathematik erlebt hat, thematisiert dieser Artikel *Schönheit* in der Mathematik und fordert anhand ausgewählter Beispiele dazu auf, die Schülerinnen und Schüler am Gymnasium vermehrt schöne Mathematik erleben zu lassen.

1 Ein niederschmetterndes Zitat

Vor einiger Zeit beklagte sich der Journalist G. Werffeli in der Schweizer Tageszeitung *Tages-Anzeiger* über den Mathematikunterricht, den er als Schüler erlebt hatte[1]:

> Schulbildung gehört zu den biologisch am besten abbaubaren Stoffen. Das ist in aller Regel nicht weiter schlimm. Es lebt sich schliesslich auch ohne plusquamperfekte Subjonktivkonjugation anständig. Was allerdings ärgerlich ist, sind die Jahre, die wir mit dem Studium eines Faches verbrachten, ohne auch nur einen Zipfel seiner ergreifenden Schönheit gezeigt bekommen zu haben: Ich meine die Mathematik.

Dabei ist die Bemerkung, die schulischen Stoffe gehörten zu den am besten abbaubaren, ziemlich abgedroschen. Unter Lehrerinnen und Lehrern wird sie oft aus der Absicht zu scherzen, oft aus Resignation, oft aus einer Mischung beider geäussert. Diese Bemerkung kann man niemandem verübeln, leben Lehrerinnen und Lehrer doch in der paradoxen Situation, Studierenden gerade dann möglichst viel beibringen zu müssen, wenn diese für die Aufnahme der Stoffe zwar Zeit, aber teils wenig Bereitschaft und Konzentration übrig haben. Erwachsene haben oftmals mehr Interesse, aber keine Zeit. Heranwachende aber kennen so viele andere Themen als schulische, die ihre volle Aufmerksamkeit beanspruchen: Das Abnabeln von den Eltern, die ersten Erfahrungen mit der Sexualität, das Abfinden mit rapiden körperlichen Veränderungen, das Heranbilden und Ausloten der eigenen Persönlichkeit, das Bestehen in der peer group,

[1] G. Werffeli, *Das Grosse Einmaleins*, Tages-Anzeiger, Das Magazin Nr. 22/98, p.7

usw. Ist es daher ein Wunder, dass die mathematschen Kenntnisse schnell abgebaut werden, dass die Studierenden für Mathematik höchstens dann gewonnen werden können, wenn der Unterricht umwerfend gut ist?

Dass Herr Werffeli aber niemals auch nur einen Zipfel der Schönheit mathematischen Tuns gesehen hat, das ist verwerflich. Das muss bei ihm und seinen unter Umständen zahlreichen Leidensgenossen immer wieder beklagt werden. Schon der englische Mathematiker Godfrey H. Hardy forderte energisch:

> Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters. Die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte. Schönheit ist die erste Prüfung. Es gibt keinen Platz in der Welt für hässliche Mathematik.

Ich meine, diese Forderung ist einfach immer aktuell und läuft nie Gefahr, abgedroschen zu wirken.

2 Ceterum censeo pulchritudinem esse utendam

Die Frage, was guter Unterricht sei, ist ausserordentlich komplex und mit Sicherheit nicht abschliessend zu beantworten. Und schon gar nicht von mir. Ich stelle hier aber die Behauptung auf, dass einer von vielen Aspekten, die einen guten Unterricht ausmachen, der ist, dass man die Schülerinnen und Schüler Anteil haben lässt an der ergreifenden Schönheit der Mathematik. So wie der römische Staatsmann Marcus Parcius Cato (234-149) den Senat beständig damit nervte, dass Karthago zerstört werden müsse[2], so sollten wir Mathematiklehrerinnen und -lehrer uns selber ständig daran erinnern, dass es eine unserer Hauptaufgaben sein muss, den Studierenden den Genuss schöner Mathematik zu ermöglichen. Ceterum censeo pulchritudinem esse utendam![3]

In den allermeisten Fällen erfährt der Gymnasiast über die Mathematik nur und genau das, was der Lehrer ihm zeigt, nichts mehr. Als Lehrer bin ich die Linse, durch die der Schüler die Mathematik sieht, sie stellt sich ihm so dar, wie ich sie ihm zeige. Allein dieser Gedanke regt uns Lehrende dazu an, uns möglichst weit von der *GIGO*-Methode (*garbage in, garbage out*) zu entfernen und dem Schüler ein möglichst genaues, vielschichtiges und anregend schönes Bild der Mathematik zu entwerfen.

Weshalb soll ein Schüler *schöne* Mathematik sehen? Warum genügt nicht das blosse Erlernen mathematischer Techniken? Ich meine, dass sich durch das Studium schöner Mathematik der mathematische *Geschmack* heranbildet. So wie der Geschmack eines guten Künstlers ihm beständig sicherer Lotse ist, gute Kunst herzustellen, so kann ein von guten Beispielen trainierter Geschmack den Schüler dazu führen, selber gute Mathematik herzustellen, freilich in ganz bescheidenem Rahmen.

[2] Ceterum censeo Carthaginem esse delendam

[3] Im übrigen bin ich der Meinung, dass Schönheit (im Mathematikunterricht) unbedingt dazu gehören sollte.

Das klingt alles sehr vage, unsachlich. Über Schönheit kann man eben nicht sachlich reden. Sie kann sich aber *zeigen* am konkreten Beispiel. Sie zeigt sich in der plötzlich empfundenen Lust, einen besonders tiefen Gedanken auszuloten, in der Freude über einen eben durchschauten, überraschenden Zusammenhang, über einen eben gewonnenen Überblick, in dem Genuss eben gefundener Ordnung und Symmetrie.

Nun kann man einwenden, dass es auf der gymnasialen Stufe unmöglich sei, die *wahre Schönheit* der Mathematik (als hätte diese jemals jemand geschaut) zu zeigen, dass Kunstwerke wie der Heiratssatz von König und Hall, der Satz von Cook ber die NP-Vollständigkeit, die Sätze von Gödel oder Andrew Wiles Beweis der Fermatvermutung dem Gymnasiasten noch für Jahre unerreichbar seien. Das mag wohl stimmen. Ich meine aber, dass sich in der gymnasialen Mathematik genügend Schönheiten „kleineren Kalibers" finden lassen, die im Kampf gegen die vielen drängenden ausserschulischen Themen des Studierenden durchaus die Chance haben, sich zu behaupten und nicht sofort abgebaut zu werden.

Der folgenden Abschnitt enthält eine kleine Sammlung von Beispielen und Hinweisen, die unter Umständen dem Thema *Schönheit in der Mathematik* zugerechnet werden können. In erster Linie soll sie aber den Leser oder die Leserin dazu anregen, nach eigenen, für ihn oder sie gültigen Beispielen zu suchen.

3 Versuche zur Schönheit

3.1 Schöne Beweise, schöne Sätze

Der ungarische Mathematiker Paul Erdős (1913-1996) hat oft davon gesprochen, dass es irgendwo, dem menschlichen Auge unsichtbar, ein BUCH geben müsse, in dem Gott die perfekten Beweise aller mathematischen Sätze aufbewahre, die schönsten, elegantesten. Zeit seines Lebens war er darum bemht, Beweise zu finden, die denen im BUCH möglichst nahe kommen.

Einer seiner Beweise zeigt die Divergenz von $\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$, wobei p die Menge P aller Primzahlen durchläuft. Der Beweis ist an Gymnasien durchaus machbar, hat Erdős ihn doch selbst mit Schülern in Tel Aviv besprochen. Und natürlich ist er von bestechender Einfachheit und Eleganz. (Siehe etwa [1].)

Die Berliner Mathematiker Martin Aigner und Günter Ziegler haben vor wenigen Jahren eine Annäherung an das BUCH gewagt ([2]). Obwohl viele darin enthaltene Sätze das gymnasiale Niveau übersteigen, ist es durchaus möglich und sinnvoll, einige dieser schönen Sätze zu behandeln, etwa die Beweise fr die Unendlichkeit der Primzahlen, elgante Abschätzungen von Integralen, die Eulersche Polyederformel, das Nadel-Problem von Buffon, das Schubfachprinzip, Sätze über endliche Mengen von Sperner, die Vervollständigung lateinischer Quadrate, vielleicht die Irrationalitt von π, usw.

Pierre Basieux fasste die 10 schönsten mathematischen Sätze in einer Art Hitparade zusammen ([3]). Die Auswahl entstand aufgrund einer Umfrage der Fachzeitschrift *The Mathematical Intelligencer*: Unter 24 Vorschlägen sollten die

Leserinnen und Leser die 10 schönsten Sätze nominieren, und Basieux stellte die Auswahl dann zusammen. Nimmt man diese Reihenfolge ernst, so sollte man am Gymnasium unbedingt die Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

(Platz 1) behandeln sowie Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen, die Transzendenz von π, den Vierfarbensatz usw.

Einige der in diesem Abschnitt erwähnten Sätze sind am Gymnasium Standard, aber es ist natürlich wesentlich, dass man ihre Schönheit „zelebriert", dass man das Schülerauge schult, das Schöne daran auch zu sehen.

3.2 Überraschende Zusammenhänge

Der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen ist allein schon ein Prunkstück. Sein Korrektheitsbeweis ist an Gymnasien übrigens gut machbar, sogar mündlich, und was den Beweis so attraktiv macht, ist, dass er die Möglichkeit bietet zur plötzlichen, grenzenlosen Klarheit: Nach einiger Konzentration, dann aber augenblicklich überflutet die Einsicht den Geist, dass der letzte von 0 verschiedene Rest ein gemeinsamer Teiler der beiden Ausgangszahlen a und b ist, und dass jeder gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler des letzten von 0 verschiedenen Teilers sein muss, so dass also der letzte von 0 verschiedene Rest tatsächlich der ggT ist.

Daneben bietet dieser Algorithmus aber auch noch überraschend schöne Zusammenh"nge. Die aus heutiger Sicht naheliegende, aber erst im 19. Jahrhundert gestellte Frage, wieviele Schritte dieser Algorithmus denn im schlechtesten Fall benötige, führt automatisch auf die Fibonacci-Zahlen: Man muss ja, soll der Algorithmus möglichst langsam sein, dafür sorgen, dass alle vorkommenden Quotienten gleich 1 sind, so dass also, wenn $a > b$ die Ausgangszahlen sind:

$$\begin{array}{rcl}
a & = & 1 \cdot b + r_1 \\
b & = & 1 \cdot r_1 + r_2 \\
r_1 & = & 1 \cdot r_2 + r_3 \\
\dots & & \\
r_{i-1} & = & 1 \cdot r_i + r_{i+1} \\
\dots & & \\
r_{k-2} & = & 1 \cdot r_{k-1} + r_k \\
r_{k-1} & = & 1 \cdot r_k + 0
\end{array}$$

Wählt man nun $ggT(a, b) = 1 = r_k = r_{k-1}$, also teilerfremde Ausgangszahlen, so entsteht von unten nach oben die Fibonacci-Folge, so dass also a und b zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Fibonacci-Folge sein müssen. Ist $a = F_n$ die n-te und $b = F_{n-1}$ die $(n-1)$-te Fibonacci-Zahl, so bentigt der Algorithmus, da alle seine Zeilen frühere Fibonacci-Zahlen besucht, genau $n - 2$ Schritte.

Die Fibonacci-Zahlen spielen auch eine wesentliche Rolle im Beweis des Satzes von Lamé, nachzulesen etwa in [4]. Lamé zeigte 1844, dass *die Anzahl nötiger Divisionen im Euklidischen Algorithmus stets* $\leq 5\cdot$*(Stellenzahl der kleineren der beiden Ausgangszahlen)* ist, ein wunderschönes Resultat, in dem der Goldene Schnitt eine Hauptrolle spielt. Führt man den Euklidischen Algorithmus nun etwa für $a = 144 = F_{12}$ und $b = 89 = F_{11}$ durch, so benötigt er $n - 2 = 10$ Schritte, und da $5\cdot$(Stellenzahl der kleineren Zahl)$= 5\cdot 2 = 10$ ist, ist der Satz von Lamé nicht zu verbessern; die von ihm angegebene Schranke wird in gewissen Fällen tatsächlich realisiert.

Ein anderer überraschender und schöner Zusammenhang stellt sich ein, wenn man, ausgehend von einem gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck, die folgende Konstruktion vorschlägt:

Trägt man eine Kathete per Zirkelschlag auf die Hypotenuse ab, so entsteht dort ein neuer Punkt D. Die Senkrechte zu AC durch D liefert dann den Punkt E auf der anderen Kathete.

Was hat dieses Stück Geometrie mit Irrationalität zu tun? Nun, wären a und b irrationale Zahlen, so müssten auch die Seiten des neu entstandenen (ebenfalls rechtwinkligen und gleichschenkligen) Dreiecks EDC alle natürlich sein, da $\overline{ED} = \overline{DC} = b - a$ und $\overline{EC} = a - \overline{BE} = a - \overline{ED}$. Das ist aber nicht möglich, denn sonst liessen sich durch Fortsetzen dieser Konstruktion immer kleinere Dreiecke konstruieren, die alle immer natürliche Seitenzahlen aufweisen müssten. Folglich können a und b nicht beide natürlich gewesen sein! Und nun der Schwenker zu $\sqrt{2}$ (oder anderen Wurzeln): Wäre $\sqrt{2}$ rational, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, so entstünde mit $a = q$ und $b = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2q^2} = \sqrt{2} \cdot q = p$ ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit natürlichen Seitenzahlen, und das Unheil nähme seinen Lauf ...

3.3 Schöne Entdeckungen

Ich meine, dass es dem Unterricht zuträglich ist, wenn mathematische Stoffe soweit als möglich in den Zusaamenhang ihrer Entdeckungsgeschichte gebracht werden. So wirkt etwa die Bemerkung des franzsischen Mathematikers Laplace (1749-1827), die Erfindung der Logarithmen krze monatelang währende Berechnungen auf einige Tage ab und verdopple dadurch sozusagen das Leben, durchaus motivierend; sie fördert auch Verständnis für die beschränkten Mittel der Mathematik des 17. Jahrhunderts. Und liest man zusätzlich die von Howard Eves in [5] überlieferte und zweifellos dramatisierte Geschichte von Henry Briggs, der eine lange, umständliche Kutschenfahrt auf sich nahm, um John Napier in Edinburgh persönlich seine Aufwartung zun machen und die neue Erfindung zu feiern, so beginnt die Mathematik zu atmen und zu leben. Die Logarithmen sind auf einmal sehr menschliche und nicht bloss abstrakt formalistische Angelegenheiten.

In ähnlicher Weise kann Cantors grossartige Entdeckung der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ lebendig gemacht werden. Schon Cantors Aussage

> Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben.

steigert das Interesse. Menschen sind empfänglich für Geschichten. Die Geschichte dieser Entdeckung ist zwar nicht *schön*, aber ergreifend, hat doch Poincaré die transfiniten Zahlen als *Krankheit*, hat doch Kronecker Cantor als *Verderber der Jugend* bezeichnet, hat doch Cantor selbst während seines Lebens eine Reihe von Nervenzusammenbrüchen erlitten, die immer häufiger und folgeschwerer wurden.

3.4 Sehen, dass es funktioniert

Ist es nicht schön zu sehen, dass die neu gelernten mathematische Stoffe sich in der Praxis tatsächlich bewähren? Es befriedigt das *Faustische* in uns. Ähnlich wie für die Hauptperson in Goethes *Doktor Faust*, die, des Nachdenkens überdrüssig, sich in ein Leben des Tätigkeit und Leidenschaft wirft, kann es für Schülerinnen und Schüler reizvoll sein, einfach nur etwas zu bewirken, etwas zu tun, was funktioniert. Es macht die Mathematik schön (und zweifellos auch gefährlich), dass sie in der Lage ist, so viele verblüffende praktische Dinge zu leisten. Daher scheinen mir Hinweise wie die folgenden unerlässlicher Bestandteil eines guten Unterrichts zu sein:

Man könnte zeigen und behandeln, wie grosse lineare Gleichungssysteme helfen, die Funktionsweise eines Computertomographen zu verstehen, auch wenn die realen Bedingungen etwas komplizierter sind als im Artikel [6]. Man könnte zeigen und behandeln, wie Resultate der Vektorgeometrie helfen, die beim GPS (*Global Positioning System*) anfallenden Berechnungen zu leisten. (Siehe etwa [7].) Man könnte zeigen und behandeln, wie die sehr moderne Theorie der *Wavelets* grossartige Erfolge in der Bildkompression feiert, so dass das FBI, das bis vor kurzem rund 200 Millionen Fingerabdruckkarten auf einer riesigen Fläche lagern musste, nun dank Wavelet-Kompression zu einer viel knapperen und effizienteren Speicherung gelangte. (Siehe etwa [8].) Man könnte zeigen und behandeln, wie auf Zahlentheorie basierende Algorithmen heute eingesetzt werden, um Nachrichten zu verschlüsseln und entschlüsseln und das Authentifizierungsproblem zu lösen. (Siehe etwa [9].) Man könnte zeigen und behandeln, wie Spline-Funktionen im Karrosseriedesign oder wie elementare Vektorgeomtrie in der Modellierung eines Raketenfluges eingesetzt werden können. (Siehe etwa [10].)

Nun soll hier nicht dem Utilitarismus das Wort geredet werden, aber ich meine, dass ähnlich wie schöner Gesang denjenigen begeistert, der sich vorher mit Atem- und Gesangstechnik und Etüden abgemühnt hat, schöne angewandte Mathematik denjenigen erfreuen kann, der sich zuvor die nötigen technischen Hilfsmittel angeeignet hat. Es ist befriedigend zu sehen, dass etwas *funktioniert.*

3.5 Kleinkunst

Auch im Kleinen, bei der täglichen Arbeit an mathematischen Details, können dem Unterricht positive Aspekte verliehen werden, indem gezeigt wird, wie die Stoffe in die ganze Theorie einzuordnen sind, welchen Platz, welchen Stellenwert, welche Abhängigkeiten sie innerhalb der besprochenen Theorie haben. Damit kann im Schüler, in der Schülerin das angenehme Gefühl erzeugt werden, die Übersicht zu haben, und die Mathematik erscheint ihnen ordentlich, nachvollziehbar und somit vielleicht ein wenig schöner.

Werden beispielsweise Potenzen behandelt, so fällt es zunächst sehr leicht zu sehen, dass die klassischen Potenzgestze fr den Fall natürlicher Exponenten in naheliegenden Einzeilenbeweisen direkt aus Axiomen der Algebra abgeleitet werden können. Man sieht das blanke Fundament der Mathematik und baut darauf eine erste Etage auf. Damit ist aber die Bedeutung der Terme a^0, a^{-n}, $a^{\frac{1}{n}}$ und $a^{\frac{m}{n}}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ noch nicht klar; die Terme sind a priori *sinn-los*, und es muss bzw. kann ihnen per definitionem ein Sinn verliehen werden, wenn sich dies als praktisch herausstellt. Dabei scheint es mir wichtig, die Definitionen $a^0 := 1$ und $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ ausreichend zu motivieren; es muss nachvollziehbar werden, wie und mit welcher Absicht das Neue in das Bestehende integriert wird. Dazu zeigt man etwa, dass das Gesetz $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ bisher nur für den Fall $n > m$ bewiesen wurde, weil sonst rechts ein noch undefinierter Term entstünde. Dies ist einerseits eine unwillkommene Einschränkung, und andererseits möchte man für das Gesetz Allgemeingültigkeit (vorerst in $\mathbb{N}$) haben. Das geht aber nur, wenn man $a^0 := 1$ und $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ definiert, denn damit das Gesetz für den Fall $n = m$ gilt, was wünschenswert ist, muss $1 = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-n} = a^0$ sein, und damit es für den Fall $n < m$ gilt, muss $\frac{1}{a^{m-n}} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ sein. Folglich bleibt, will man die Theorie schön und einheitlich erweitern, nur die Wahl der obigen Definition. Somit erscheint auch dieses kleine Detail mathematischen Tuns planmässig, zielstrebig und nachvollziehbar.

Wird beispielsweise die Konvergenz/Divergenz geometrischer Reihen behandelt, so wird die Paradoxie von Achilles und der Schildkröte gerne bemüht. Aber weshalb stellt sie sich überhaupt, und wie kann sie überwunden werden? Man kann sehr viel Motivation für die Untersuchung des Konvergenzverhaltens schaffen, wenn man zurückblendet zu den Disputen der vorsokratischen Philosophen. Heraklit und Parmenides waren zwei Vorsokratiker, die gegensätzliche Positionen vertraten: Während der Aristokrat Heraklit die Meinung vertrat, dass alles fliesse, nichts Bestand habe, alles stetiger Veränderung unterworfen sei, löste Parmenides das Problem des Werdens und Vergehens mit der These, dass alle Veränderungen Trugbilder seien, dass das Seiende immer schon (und immer schon *so*) gewesen sei, dass zum Seienden nichts hinzukomme. Diese Lehre widersprach freilich der alltäglichen Erfahrung des Werdens und Vergehens, weshalb Parmenides sich zahlreichen gegnerischen Meinungen ausgesetzt sah. Zenon nun war ein Schüler von Parmenides, der den Meister bewunderte und es sich zur Aufgabe machte, dessen Lehren gegen die Anfechtungen der Gegner zu verteidigen. Und er tat dies in einer Weise, die (heute) einer häufigen mathematischen Vorgehensweise entspricht: Er nahm zur Probe die Position der Gegner ein und zog daraus (scheinbar) logische Schlüsse, bis er bei einem Widerspruch anlangte. Damit schien die gegnerische Position ausgehebelt. Um etwa die gegnerische Position, es gebe Bewegung, zu entkräften, erfand Zenon die Paradoxie von Achilles und der Schildkröte, um damit aus der Annahme, die Gegner hätten recht, zum Widerspruch zu gelangen, dass Achilles die Schildkröte niemals einzuholen vermag.

Das Zenonsche Argument lässt sich in der Tat nur entkräften, wenn das Konvergenzverhalten der Reihe der Einzelstrecken seriös untersucht wird. Dafür legt die Paradoxie einen fruchtbaren Boden, und die Schülerinnen und Schüler nehmen die nun folgende Konvergenzuntersuchung als nachvollziehbar oder gar dringlich wahr. Vielleicht kann dieses Beispiel sogar als erstes und eindrückliches Beispiel dafür dienen, dass eine Summe unendlich vieler Glieder tatsächlich einen endlichen Wert haben kann.

4 Schlussbemerkungen

Die Beispiele und Hinweise in Kapitel 3 erheben keineswegs den Anspruch auf Orginalität; sie sind dem Alltag des Unterrichtenden entnommen, oft gesehen, oft durchdacht, aber ich meine, sie sind spektakulär. Tausend kleine Dinge der Mathematik sind, beim rechten Licht betrachtet, spektakulär, die Kunst ist nur, für das richtige Licht zu sorgen. In diesem Sinne sollen meine Bemerkungen als Anregung zur Diskussion verstanden werden darüber, was schöne Mathematik eigentlich ist, wie sie gefördert und in den Alltag des Mathematikunterrichts getragen werden kann.

Es muss unter allen Umständen vermieden werden, dass Menschen das Gymnasium verlassen, ohne auch nur einen Zipfel der ergreifenden Schönheit der Mathematik gesehen und miterlebt zu haben. Dies ist eine der ersten Forderungen an guten Unterricht.

Literatur

[1] B. Artmann, W. Gericke: *Didaktische Beobachtungen zu einem Divergenzbeweise für* $\Sigma 1/p$ *von Paul Erdös*, Mathematische Semesterberichte 27 (1990) Heft 1

[2] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*, Springer-Verlag, Berlin (2002)

[3] P. Basieux: *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze*, Rowohlt Tb. (2000)

[4] A.P. Barth: *Algorithmik für Einsteiger*, Vieweg-Verlag, Wiesbaden (2003)

[5] H. Eves: *Great Moments in Mathematics*, MAA (1981)

[6] U. Kirchgraber e.a.: *Computer-Tomographie.* In: *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* Band 6, Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe, Franzbecker-Verlag, Berlin (2000)

[7] D. Haubrock: *GPS in der analytischen Geometrie.* In: *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* Band 6, Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe, Franzbecker-Verlag, Berlin (2000)

[8] I. Daubechies: *Parlez-vous Wavelets?* In: *What's Happening in the Mathematical Sciences* Volume 2, AMS (1994)

[9] A. Beutelspacher: *Kryptologie*, Vieweg-Verlag, Wiesbaden (2002)

[10] A.P. Barth e.a.: *Mathematik und Wirklichkeit.* In: MNU Jahrgang 56 (2003) Heft 2