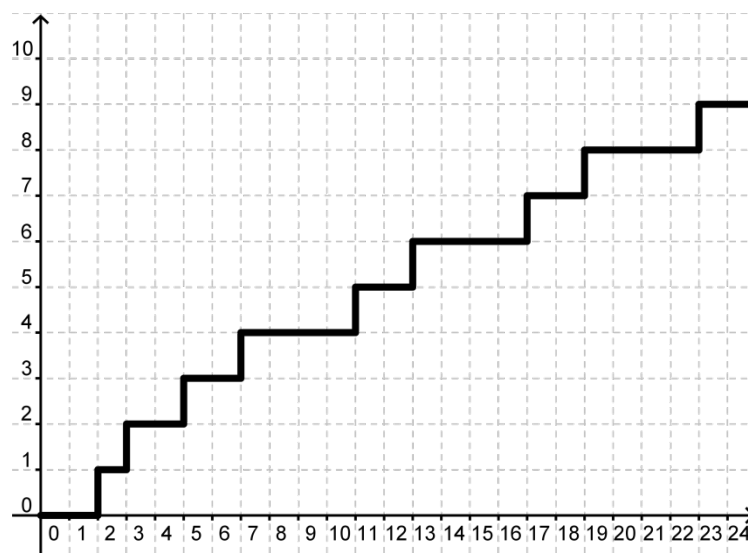


Der Widerspenstigen Zähmung

- Mathematische Sensationen im Wonnemonat Mai

Armin P. Barth

Der amerikanische Mathematiker Don Zagier schrieb einmal in einem Aufsatz, die Primzahlen gehörten zu den widerspenstigsten Objekten, die in der Mathematik studiert würden. Und vielleicht darum üben sie auf viele Menschen eine nie nachlassende Faszination aus. Im Wonnemonat Mai waren die Primzahlen gerade zweimal in den Schlagzeilen, zum einen, als bekannt wurde, dass der Mathematiker Harald Helfgott von der *École normale supérieure* in Paris die schwache Goldbach-Vermutung gelöst haben soll. Und zum anderen, dass der aus China stammende Mathematiker Yitang Zhang dem Geheimnis der Primzahlzwillinge einen bedeutenden Schritt näher gekommen sein soll. Worum geht es? Und sind die Primzahlen damit gezähmt?



Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl grösser als 1, die nur durch 1 und sich selber ohne Rest geteilt werden kann. Stellt man sich die natürlichen Zahlen als Treppe vor, die immer dann, wenn eine Primzahl erscheint, eine Stufe nach oben steigt, dann sind die ersten Stufen also bei 2 und bei 3, die nächste bei 5, die nächste bei 7, die nächste bei 11, und so weiter. Man weiss heute einiges über diese Treppe, zum Beispiel, dass es keine Grenze für die Länge einer Stufe gibt, dass also primzahlfreie Zonen existieren, die länger sind als jede nur denkbare Zahl. Und man weiss auch, dass die Treppe in die Unendlichkeit aufsteigt, weil es unendlich viele Primzahlen gibt. Aber bis heute ist kein Muster bekannt, nach dem die Treppenstufen angeordnet sind, und die präzise künftige Anordnung der Stufen lässt sich nicht vorhersagen; die Primzahlen lassen sich ihre Geheimnisse nur sehr widerstrebend entlocken.

Der deutsche Mathematiker Christian Goldbach hatte sich bestimmt nicht ausmalen können, was er anrichten würde, als er am 7. Juni 1742 einen Brief an seinen berühmten Kollegen Leonhard Euler sandte. Goldbach vermutete in dem besagten Brief, dass jede ungerade Zahl grösser als 5

sich als Summe von drei Primzahlen schreiben lässt, was man leicht an kleinen Zahlen überprüfen kann: 15 zum Beispiel ist die Summe der drei Primzahlen 3, 5 und 7 oder auch die Summe der drei Primzahlen 11, 2 und 2. Diese sogenannte *schwache Goldbach-Vermutung* wurde zu einem der bekanntesten ungelösten Probleme der Mathematik, weil es bis vor kurzem niemandem gelungen war zu beweisen, dass eine solche Darstellung wirklich für jede beliebig grosse Zahl gefunden werden kann. Euler selber ergänzte die Vermutung, dass jede gerade Zahl grösser als 2 als Summe von nur zwei Primzahlen geschrieben werden kann. Auch diese sogenannte *starke Goldbach-Vermutung* kann leicht an kleinen Zahlen überprüft werden: $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, und so weiter.

Nun ist es so, dass die schwache Vermutung in derselben Sekunde bewiesen wäre, in der jemand einen Beweis für die starke Vermutung findet. Denn wenn jede gerade Zahl grösser als 2 als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann, dann kann automatisch jede ungerade Zahl grösser als 5 als Summe von drei Primzahlen geschrieben werden. Dazu muss man eine ungerade Zahl x bloss in der Form $(x - 3) + 3$ notieren; der zweifellos gerade Anteil $x - 3$ wäre dann Summe von zwei Primzahlen, und wenn man die 3 wieder dazu nimmt, dann ist x Summe von drei Primzahlen. Die starke Vermutung wartet allerdings seit über 270 Jahren auf einen schlüssigen Beweis. Was Helfgott nun geschafft haben soll, ist, einen Beweis für die schwache Vermutung zu finden. Doch auch wenn dieser Beweis sich als hieb- und stichfest herausstellen sollte, was aktuell von der Fachwelt überprüft wird, ist damit die starke Vermutung noch immer nicht nachgewiesen, denn die schwache Vermutung impliziert nicht die starke. Es würde höchstens die Hoffnung aufkeimen, dass man mit den Methoden, die Helfgott benutzt hat, auch der starken Vermutung zu Leibe rücken könnte.

Unter einem *Primzahlzwilling* versteht man ein Paar von Primzahlen, von denen die grössere um genau 2 grösser ist als die kleinere. 3 und 5 bilden ein solches Paar oder auch 17 und 19 und sehr viele weitere. In obiger Treppe zeigen sich solche Zwillinge als Treppenstufen der Länge 2, also als kürzestmögliche Stufen abgesehen von der allerersten. Die Frage, ob sich in der Primzahltrappe wohl unendlich viele Stufen der Länge 2 finden lassen, bewegt die Primzahltüftler schon seit 2000 Jahren; bis zum heutigen Tag konnte diese Vermutung weder bewiesen, noch widerlegt werden. Aber nun soll es Yitang Zhang geglückt sein zu beweisen, dass es unendlich viele Paare von Primzahlen gibt, die einen Abstand von weniger als 70 Millionen haben. Ein Abstand von 70 Millionen statt ein Abstand von 2 scheint enttäuschend zu sein, aber auch hier glüht die Hoffnung auf, dass mit denselben oder ähnlichen Methoden auch die berühmte Zwillinge-Vermutung gemeistert werden kann. Beide hier erläuterten ungelösten Probleme schienen noch nie so zum Greifen nah wie heute.

Kritiker betonen immer wieder, dass die Suche nach Beweisen solcher Vermutungen sinnlos sei, da die Aussagen keinerlei praktische Konsequenz hätten. Das mag heute zutreffen. Aber alle Menschen, die jemals vor einem herausfordernden Rätsel standen, sei es ein Rebus, ein Sudoku, ein Code, ein Kreuzworträtsel oder etwas anderes, können nachvollziehen, wie unangenehm es sein kann, eine Frage, die sich so leicht stellen lässt, nicht beantworten zu können. Es lässt uns einfach nicht los. Es ist ein uraltes Begehren der Menschheit, all das verstehen zu wollen, was sich verstehen lässt, und da bilden die Mathematiker keine Ausnahme. Zudem haben fast immer mathematische Entdeckungen, die einfach nur Ergebnisse von Neugier waren, irgendwann auch praktische Anwendungen gefunden. So hat etwa die Zahlentheorie, deren alltagspraktische

Anwendbarkeit bis Mitte des letzten Jahrhunderts wenig wahrscheinlich schien, in den letzten Jahrzehnten plötzlich zu einer Revolution in der Verschlüsselungstechnik geführt.

Sollten die starke Goldbach-Vermutung und die Zwillingsvermutung dereinst bewiesen sein, wird ein ureigener menschlicher Trieb auf faszinierendste Weise gestillt werden: Wissensdurst. Die Primzahlen aber werden noch nicht gezähmt sein; die mysteriöse Treppe wird uns wohl noch sehr lange Zeit Rätsel aufgeben...