Die Leiden des jungen Käfers

Armin P. Barth

Das Schicksal, das der Protagonist dieser Geschichte erleidet, ist wahrlich grausam. Es handelt sich um einen Käfer namens Karl. Das Grausame liegt aber nicht so sehr an seinem Namen als an der Tatsache, dass er eine überaus langwierige Wanderung voller Frustration hinter sich bringen muss, die am linken Ende eines Gummibandes beginnt und erst endet, wenn das rechte Ende erreicht ist. Im Gegensatz zur Abbildung 1 müssen wir uns Karl punktförmig vorstellen, er wandert mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1 Zentimeter pro Sekunde, und das Gummiband ist (anfangs) 1 Meter lang. Das Grausame besteht nun darin, dass nach jeder Sekunde das Band *instantan* (also ohne Zeitverlust) und wie durch Zauberhand um einen weiteren Meter nach rechts hin gestreckt wird. Die Frage ist, ob – und gegebenenfalls wann – Karl das rechte Ende des ständig sich dehnenden Bandes erreichen kann?

Diese Aufgabe ist nicht neu. Sie geht auf Martin Gardner zurück und kann in [1] nachgelesen werden. Wir bereiten sie hier so auf, dass ihre Behandlung am Gymnasium sowohl einen mathematischen Gewinn als auch einen Gewinn im Zusammenhang mit der Beherrschung des Taschenrechners ermöglicht.

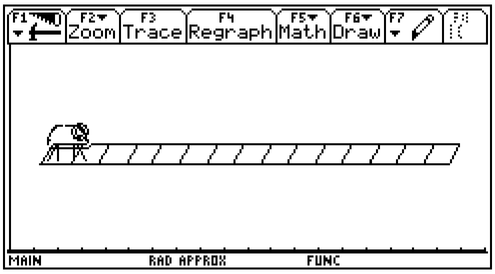


Abb. 1

Beim ersten oberflächlichen Hinsehen ist der Gedanke nah, dass Karls Wanderung niemals enden wird, weil das rechte Bandende uneinholbar und rasend schnell in die Ferne rückt. Und tatsächlich sind die ersten Berechungen mehr als unerfreulich: Wir notieren hier einmal die Entfernung des Käfers zum linken Bandende wie auch zum rechten und zwar jeweils *vor* der Streckung und im Sekundentakt:

Nach der 1. Sekunde hat Karl 1 cm zurückgelegt, und es warten noch 99 cm auf ihn.

Nach der 2. Sek. ist Karl $2 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$ cm vom linken Ende – Die Verdoppelung erfolgt durch die Bandstreckung! – und $2 \cdot 100 - 3 = 197$ cm vom rechten Ende entfernt.

Nach der 3. Sek. ist Karl $\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)+1=3\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ $=5.5$ cm vom linken Ende – Diesmal wird das Band um den Faktor $\frac{3}{2}$ gestreckt! – und $3\cdot 100-5.5\ =294.5$ cm vom rechten Ende entfernt.

Nach der 4. Sekunde ist Karl $\frac{4}{3}\cdot 3\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+1=$ $=4\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=8.\overline{3}$ cm vom linken Ende – Diesmal wird das Band um den Faktor $\frac{4}{3}$ gestreckt! – und $4\cdot 100-8.\overline{3}=391.\overline{6}$ cm vom rechten Ende entfernt.

Allgemein gilt also: Nach *t* Sekunden (und unmittelbar vor der jeweiligen Streckung) befindet sich Karl

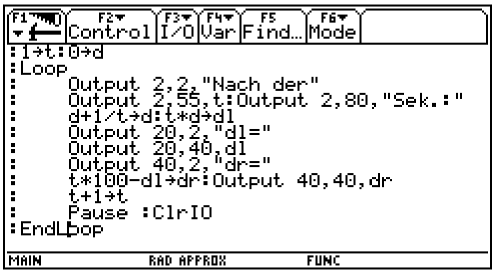
$$\boxed{dl(t):=t\cdot\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{i}\text{ cm}}\quad(1)$$

vom linken Ende und

$$\boxed{dr(t):=t\cdot 100-dl(t)\text{ cm}}\quad(2)$$

vom rechten Ende entfernt. (Dabei steht *dl* für „Distanz links“ und *dr* für „Distanz rechts“.)

Hat man die Formel einmal erarbeitet, kann man leicht ein kleines Taschenrechner-Programm schreiben, das uns in schneller Folge konkrete (und entmutigende) Zahlen liefert. Abbildung 2 zeigt den zentralen Teil des Programm, das nacheinander die Werte *dl* und *dr* anzeigt. Abbildung 3 zeigt den Output des Programms nach 30maligem Drücken der Enter-Taste.




```
:1→t:0→d
:Loop
:    Output 2,2,"Nach der"
:    Output 2,55,t:Output 2,80,"Sek.:"
:    d+1/t→d:t*d→dl
:    Output 20,2,"dl="
:    Output 20,40,dl
:    Output 40,2,"dr="
:    t*100-dl→dr:Output 40,40,dr
:    t+1→t
:    Pause :ClrIO
:EndLoop
```

Abb. 2

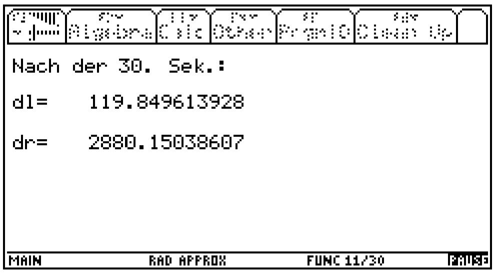


Abb. 3

Karls grausames Schicksal scheint besiegelt; das rechte Bandende scheint nicht nur unerreichbar zu sein, es vergrössert seinen Abstand vom Käfer auch in Schwindel erregendem Tempo. Oder doch nicht? Wir rücken dem Problem mit etwas mehr Mathematik zu Leibe! Zunächst einmal ist der Umgang mit der harmonischen Reihe beschwerlich. Kann man das nicht vereinfachen? Abbildung 4 macht deutlich, dass Folgendes gilt: Die harmonische Reihe kann als Summe der Flächeninhalte der abgebildeten Rechtecke aufgefasst werden, die ja alle Breite 1 haben und die man sich nach rechts hin beliebig weit fortgesetzt denkt.

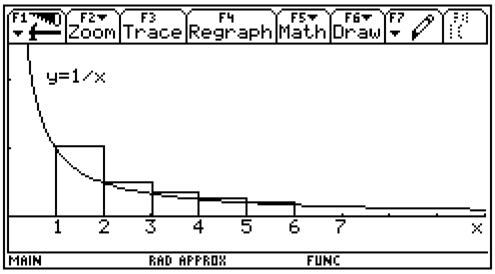


Abb. 4

Es folgt also:

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{i} > \int_{1}^{t+1}\frac{1}{x}dx > \int_{1}^{t}\frac{1}{x}dx = \ln(x)\Big|_{1}^{t} = \ln(t)$$

Der Fehler, den wir machen, wenn wir anstatt mit der von Hyperbel und x-Achse eingeschlossenen Fläche mit den Rechtecken rechnen, ist nicht sehr gross. Bekanntlich gilt ja

$$\boxed{\gamma := \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{i} - \ln(t)\right) = 0.5772...} \quad (3)$$

Diese sog. *Euler-Konstante* (vgl. auch [2]) können wir benutzen, um *dr* zwar approximativ, dafür aber viel einfacher zu berechnen. Aus (3) folgt ja, dass für grosse t

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{i} \approx \ln(t) + \gamma\ .$$

Mit (1) und (2) schliessen wir, dass

$$\boxed{dr(t) = t\cdot\left(100 - \sum_{i=1}^{t}\frac{1}{i}\right) \approx t\cdot\left(100 - \ln(t) - \gamma\right)} \quad (4)$$

Die für Karl so entscheidende Frage ist nun, ob diese Funktion für $t > 0$ jemals den Wert 0 liefert und gegebenenfalls wann? Verblüffend daran ist, dass der erste (unkritische) Versuch, sich den Graphen von $dr(t)$ anzuschauen, den Betrachter mit grosser Wahrscheinlichkeit in die Irre führt. Der Graph scheint nämlich einer geraden Linie ähnlich zu sein und für alle Ewigkeit anzuwachsen, wie Abbildung 5 zeigt.

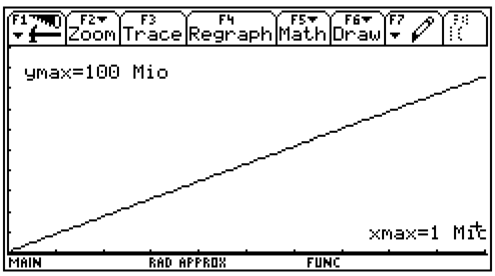


Abb. 5

Erst wenn man wirklich grosse obere Grenzen setzt, offenbart der Graph sein wahres Gesicht (Abb. 6).

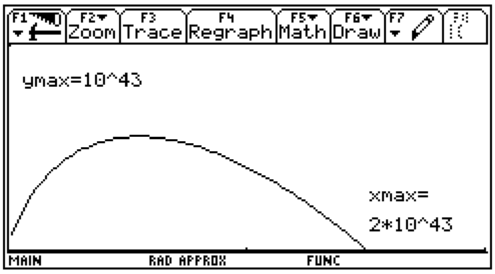


Abb. 6

Spätestens jetzt scheint es angebracht, im Unterricht die Funktion $dr(t)$ (in beiden Erscheinungen (2) und (4)) mit mathematischen Argumenten zu analysieren, um ganz klar zu machen, dass für $t > 0$ eine Nullstelle existieren *muss*.

Karl erreicht das rechte Ende also doch. Trotz der frohen Botschaft ist sein Schicksal grausam, und das wird sofort klar, wenn man berechnet, wie viel Zeit bis zu seiner Ankunft verstrichen sein wird. Aus (4) folgt, dass die Nullstelle der Funktion $dr(t)$ erreicht ist, sobald $100 - \ln(t) - \gamma = 0$, also sobald

$$\boxed{t = e^{100-\gamma} \approx 1.5 \cdot 10^{43} \text{ Sek.}}$$

Karl müsste ein wahrhaft „metusalemischer“ Käfer sein, wenn er diese Wanderung zu Lebzeiten beenden möchte, er wäre nämlich über $4 \cdot 10^{35}$ Jahre unterwegs!

<u>Literatur:</u>

[1] Martin Gardner, „*The Rubber Rope: Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*“, MAA, Washington, DC, 2005

[2] Th. P. Dence, J. B. Dence, “*A Survey of Euler’s Constant*”, in: Mathematics Magazine, Vol. 82, NO. 4, October 2009